Unidad IV: Sistemas continuos (continuación)

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la resolución de problemas enfocados a las ecuaciones lineales.

Conceptos a desarrollar en la unidad: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis de los sistemas lineales discretos y continuos en la aplicación de las ecuaciones.

4.1 Solución general y análisis de ecuaciones[1]

Existen métodos de resolución generales para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que permiten encontrar soluciones analíticas. En particular si los coeficientes de la ecuación lineal son constantes o periódicos la solución es casi siempre fácil de construir. Para coeficientes no constantes o no periódicos, pero que son desarrollables en serie de Taylor o serie de Laurent es aplicable con ciertas restricciones el método de Frobenius. Otra posibilidad es reducir una ecuación diferencial lineal de orden n a un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Para las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales no existen métodos generales.

Soluciones numéricas

Algunos de los métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales son el método de Runge-Kutta, los métodos multipaso y los métodos de extrapolación.

Una ecuación diferencial de primer orden con la condición inicial se expresa de la siguiente forma:

$$[L] = \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Donde $y(t_0) = y_0$ es la condición inicial.

Entre los tipos de EDOs de primer orden se encuentran:

Ecuación de variables separables

Son EDOs de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

En donde es posible "despejar" todos los términos con la variable dependiente en función de la variable independiente, quedando ahora la ecuación:

$$g(y)dy = h(t)dt$$

En donde se procede integrando ambos miembros de la ecuación

$$\int g(y)dy = \int h(t)dt$$

---

[1] Información obtenida del sitio de Internet monografías.com

De donde es posible obtener la solución

Ecuación exacta

Una ecuación de la forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$

Se dice exacta si existe una función F que cumpla:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N.$$

Su solución es entonces:

$$F(x,y) = C.$$

EDO de primer orden

La ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$y' = f(x,y), \qquad \text{con } f(tx,ty) = tf(x,y), \forall t \neq 0$$

Para resolver se usa la sustitución y=xv, siendo v= v(x) una función desconocida. Sin embargo, la palabra 'homogénea' asume otro significado, dentro del estudio de las EDOs, fuera de este contexto.

Ecuación lineal

Una ecuación diferencial es lineal si presenta la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Y que tienen por solución:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

Como se puede apreciar, esta ecuación es una ecuación diferencial de Bernoulli, con n=0.

Ecuación de Bernoulli

Una ecuación diferencial de Bernoulli, que es a su vez una generalización de la ecuación diferencial lineal, fue formulada por Jakob Bernoulli y resuelta por su hermano, Johann Bernoulli y presenta la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

En la cual, si se hace la sustitución $z = y^{1-n}$, la ecuación se transforma en una ecuación lineal con z como variable dependiente, resolviéndose de manera análoga.

Ecuación de Riccati

Esta ecuación diferencial introducida por Jacopo Francesco Riccati presenta la estructura:

$$y'(x) + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

Para resolverla, se debe hacer la sustitución $y = y_p + \frac{1}{z}$, donde $y_p$es una solución particular cualquiera de la ecuación.

Ecuación de Lagrange

Una ecuación diferencial de Lagrange presenta la forma:

$$y = g(y')x + f(y')$$

Resolviéndose con la sustitución $y' = p$, obteniéndose una solución general y una solución particular.

Ecuación de Clairaut

Una ecuación diferencial de Clairaut, llamada así en honor a Alexis-Claude Clairaut, tiene la forma:

$$y = xy' + f(y')$$

Como se puede apreciar, esta ecuación es una forma particular de la ecuación diferencial de Lagrange, con $g(y') = y'$, por lo cual, su resolución es análoga a la anterior.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Muchos problemas físicos importantes tanto en mecánica como en electromagnetismo conllevan la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Ecuación lineal con coeficientes constantes

La ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

La resolución de esta ecuación depende de las raíces del polinomio característico:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

En función de cómo sean las raíces de dicho polinomio se distinguen tres casos posibles y distintos:

- Caso 1: dos raíces reales y distintas $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, en este caso la solución general tiene la forma:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{x0}^{x} e^{-\lambda_1 u} f(u) du + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{x0}^{x} e^{-\lambda_2 u} f(u) du$$

- Caso 2: dos raíces reales e iguales $(\lambda_1 = \lambda_2)$, en este caso la solución general tiene la forma:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + x e^{\lambda_1 x} \int_{x0}^{x} e^{-\lambda_1 u} f(u) du - e^{\lambda_1 x} \int_{x0}^{x} x e^{-\lambda_2 u} f(u) du$$

- Caso 3: dos raíces complejas conjugadas $(\lambda_1 = p + qi, \lambda_2 = p - qi)$, en este caso la solución general tiene la forma:

$$y(x) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx) + \frac{e^{px} \sin qx}{q} \int_{x_0}^{x} e^{-pu} f(u) \cos qu \, du - \frac{e^{px} \cos qx}{q} \int_{x_0}^{x} e^{-pu} f(u) \sin qu \, du$$

El último término de esta última ecuación está relacionado con la integral de Duhamel.

Ecuación diferencial de Euler o de Cauchy

Esta ecuación tiene la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = g(x)$$

Y puede resolverse mediante el cambio de variable $x = e^t$ que transforma la ecuación anterior en una ecuación de coeficientes constantes resoluble por los métodos de la sección anterior:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} + (a-1)\frac{d\bar{y}}{dt} + b\bar{y} = g(e^t), \qquad \bar{y}(t) = y(e^t)$$

Ecuaciones de Bessel

La ecuación diferencial de Bessel, aparece con frecuencia en la resolución del problema de Dirichlet en coordenadas cilíndricas. Dicha ecuación tiene la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

Esta ecuación es resoluble mediante las llamadas funciones de Bessel:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

Además de esta ecuación existe otra ecuación resoluble mediante funciones de Bessel. La ecuación diferencial de Bessel modificada, aparece con frecuencia en la resolución del problema de Dirichlet en coordenadas cilíndricas. Dicha ecuación tiene la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2p+1) x \frac{dy}{dx} + (\alpha x^{2r} + \beta^2) y = 0$$

Cuya solución viene dada por:

$$y(x) = x^{-p}\left[C_1 J_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right) + C_2 Y_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right)\right], \qquad q := \sqrt{p^2 - \beta^2}$$

Ecuación de Legendre

La ecuación diferencial de Legendre, aparece con frecuencia en la resolución del problema de Dirichlet en coordenadas esféricas. La ecuación tiene la forma:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

Cuando n es un entero una de las dos soluciones independientes que conforman la solución general de la ecuación anterior es el polinomio de Legendre de grado n:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\ \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

La solución general puede expresarse en la forma:

$y(x) = C_1 U_n(x) + C_2 V_n(x)$, o bien, $= y(x) = \bar{C}_1 P_n(x) + \bar{C}_2 Q_n(x)$

Donde:

$$\begin{cases} U_n(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \dots \\ V_n(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \dots \end{cases}$$

$$P_n(x) = \begin{cases} U_n(x)/U_n(1) & n = 0, 2, 4, \dots \\ V_n(x)/V_n(1) & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}, \text{ y}$$

$$Q_n(x) = \begin{cases} V_n(x)U_n(1) & n = 0, 2, 4, \dots \\ -U_n(x)V_n(1) & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

La ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes es de la siguiente forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

Donde los términos $a_i$representan constantes $\forall i \in \mathbb{N}$En el caso homogéneo cuando el segundo miembro es idénticamente nulo, las soluciones de esta ecuación se pueden obtener a partir de la raíces del polinomio característico de la ecuación:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

En el caso de que todas las raíces sean diferentes la solución viene dada por:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$$

En el caso de que existan varias raíces múltiples, existiendo sólo k raíces diferentes y siendo m_i la multiplicidad de la raíz i-ésima, la solución general es de la forma:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(C_{i,0} + C_{i,1}x + \ldots + C_{i,m_i-1}x^{m_i-1} \right) e^{\lambda_i x} = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} C_{i,j}x^j \right) e^{\lambda_i x}, \quad k \le n, \ \sum_{j=1}^{k} m_j = n$$

Las multiplicidades de cada raíz son el exponente de la siguiente descomposición:

$$a_n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

4.2 Recurrencias lineales[2]

Una relación de recurrencia es lineal de grado k si tiene la siguiente estructura:

$$c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + \ldots + c_{k-1}(n)a_{n-k+1} + c_k(n)a_{n-k}$$

Siendo $c_i(n)$ funciones reales de n, y $F(n)$ una función de n.

El adjetivo lineal indica que cada término de la secuencia está definido como una función lineal de sus términos anteriores. El orden de una relación de recurrencia lineal es el número de términos anteriores exigidos por la definición.

En la relación $a_n = a_{n-2}$ el orden es dos, porque debe haber al menos dos términos anteriores (ya sean usados o no).

Ejemplos:

$$3a_n - n - 1a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

Ecuación de Recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes

Se llama ecuación de recurrencia lineal homogénea de grado k, con coeficientes constantes, a una expresión del tipo:

$$a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} = 0, c_i \in \mathbf{R}, c_k \neq 0$$

Para poder encontrar una solución, hacen falta unas condiciones de contorno o iniciales $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$, siendo k el grado de la ecuación.

La recurrencia lineal, junto con las condiciones iniciales $a_0, \cdots, a_{k-1}$, determinan la secuencia única.

Sea la ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden k anterior, se denomina ecuación característica a la ecuación de grado k:

$$x^k + c_1x^{k-1} + \cdots + c_k$$

---

[2] José Ignacio Aranda Iriarte (2007). Apuntes de ecuaciones diferenciales

La generación de la función racional

Las secuencias lineales recursiva son precisamente las secuencias cuya función de generación es una función racional: el denominador es el polinomio auxiliar (a una transformación), y el numerador se obtiene con los valores iniciales.

El caso más sencillo son las secuencias periódicas, $a_n = a_{n-d}$, n≥d que tienen secuencia $a_0, a_1, \cdots, a_{d-1}, a_0, \cdots$ y función de generación una suma de una serie geométrica:

$$\frac{a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{d-1}x^{d-1}}{1 - x^d} = \begin{array}{l}(a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{d-1}x^{d-1}) + \\ (a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{d-1}x^{d-1})x^d + \\ (a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{d-1}x^{d-1})x^{2d} + \\ \cdots\end{array}$$

Más general, dada la relación de recurrencia:

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_da_{n-d}$$

Con función de generación

$$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots$$

La serie es aniquilada por a_k y anteriormente por el polinomio:

$$1 - c_1x^1 - c_2x^2 - \cdots - c_dx^d$$

Eso es, multiplicando la función de generación por el polinomio

$$b_n = a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} - \cdots - c_da_{n-d}$$

Como el coeficiente en x^n, que desaparece (por la relación de recurrencia) para n ≥ d. Así:

$$(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots)(1-c_1x^1-c_2x^2-\ldots-c_dx^d) = (b_0+b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_{d-1}x^{d-1})$$

Como dividiendo:

$$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = \frac{b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_{d-1}x^{d-1}}{1 - c_1x^1 - c_2x^2 - \cdots - c_dx^d}$$

Expresando la función de generación como una función racional. El denominador es $x^dp(1/x)$, una transformación del polinomio auxiliar (equivalente, invirtiendo el orden de los coeficientes); también se puede usar cualquier múltiplo de esta, pero esta normalización es elegida por ambas porque la relación simple del polinomio auxiliar, y de ese modo $b_0 = a_0$.

Relación con la diferencia de ecuaciones

Dada una secuencia $\{a_n\}$ de números reales: la primera diferencia $d(a_n)$ se define como $a_n - a_{n-1}$

La segunda diferencia $d^2(a_n)$ se define como $d(a_n) - d(a_{n-1})$,

Que se puede simplificar a $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}$.

Más general: la diferencia d^k se define como $d^{k-1}(a_n) - d^{k-1}(a_{n-1})$

A diferencia de la ecuación es una ecuación compuesta por a_n y sus diferencias. Cada relación de recurrencia puede ser formulada como una ecuación de diferencia. Por el contrario, cada ecuación de diferencia puede ser formulada como una relación de recurrencia. Algunos autores así utilizan los dos términos intercambiables. Por ejemplo, la ecuación de la diferencia:

$$3d^2(a_n) + 2d(a_n) + 7a_n = 0$$

Es equivalente a la relación de recurrencia:

$$12a_n = 8a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

De este modo se puede resolver relaciones de recurrencia por la reiteración como ecuaciones diferencia, y luego la solución de la ecuación de diferencia, análogamente como una solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ver escala de tiempo de cálculo para la unificación de la teoría de las ecuaciones de diferencia con la de las ecuaciones diferenciales.

Resolución

Sean

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$$

una ecuación de recurrencia lineal homogénea, $x^k + c_{n-1}x^{k-1} + \cdots + c_{n-k}$ su ecuación característica y, $x_1, x_2, \cdots, x_s$ las raíces de la ecuación característica con multiplicidades $m_1, m_2, \cdots, m_s$ respectivamente. La solución de esta ecuación sería:

$$a_n = P_1(n)(x_1)^n + P_2(n)(x_2)^n + \cdots + P_s(n)(x_s)^n$$

Con $P_i(n)$ el polinomio de grado menor o igual que $m_i - 1$. Para poder calcular los coeficientes de los polinomios $P_i(n)$, necesitamos saber las condiciones iniciales de la ecuación de recurrencia.

Ejemplo: Números de Fibonacci

Los números de Fibonacci están definidos usando la siguiente relación de recurrencia lineal:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Con los valores iniciales:

$$F_1 = 0$$
$$F_2 = 1$$

La secuencia de los números de Fibonacci comienza: 0, 1, 1, 2, 3 ,5, 8, 13, 21 ,34, 55, 89... El objetivo de la resolución de la ecuación de recurrencia es encontrar una forma cerrada para calcular los números de Fibonacci.

La ecuación característica es la siguiente:

$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$F(n) = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para hallar el valor de A_1y A_2resolvemos las siguientes ecuaciones:

$$F_1 = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$F_2 = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Entonces:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Y

$$A_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

La forma cerrada para los números de Fibonacci es:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Ecuación de Recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes

Recibe el nombre de ecuación de recurrencia lineal no homogénea de grado k, con coeficientes constantes, una expresión del tipo:

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-\mathbf{1}} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = F(n), c_i \in \mathbf{R}, c_k \neq 0.$$

Resolución

La solución general sería: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la ecuación de recurrencia lineal homogénea asociada es decir la ecuación : $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, c_i \in \mathbf{R}, c_k \neq 0$ y donde $a_n^{(p)}$ es la solución particular que depende de la función F(n). Por lo tanto los pasos a seguir serían, primero calcular la solución de la ecuación homogénea, calcular una solución particular para F(n) y sumarla a la homogénea, y a continuación aplicar las condiciones iniciales para calcular las constantes. En la siguiente tabla, encontramos cuales son las posibles soluciones particulares:

$F(n)$	${a_n}^{(p)}$
C, constante	C_0, constante
n	$C_0 + C_1 n$
n^2	$C_0 + C_1 n + C_2 n^2$
$n^t, t \in \mathbf{Z}^+$	$C_0 + C_1 n + \cdots + C_t n^t$
$r^n, r \in \mathbf{R}$	$C_0 r^n$
$n^t r^n$	$r^n(C_0 + C_1 n + C_2 n^2)$
$\sin(An), A \in \mathbf{R}$	$C_0 \sin(An) + C_1 \cos(An)$
$\cos(An), A \in \mathbf{R}$	$C_0 \sin(An) + C_1 \cos(An)$
$r^n \sin(An), A \in \mathbf{R}$	$C_0 r^n \sin(An) + C_1 r^n \cos(An)$
$r^n \cos(An), A \in \mathbf{R}$	$C_0 r^n \sin(An) + C_1 r^n \cos(An)$

Consideraciones:

1.- Si F(n) es una combinación lineal de algunas de las funciones de la tabla anterior, su solución particular es la combinación lineal de las soluciones particulares de esas mismas funciones.

2.- Si uno de los sumandos de F(n) es el producto de una constante por una solución de la ecuación característica homogénea asociada, entonces es necesario multiplicar la solución particular correspondiente a este sumando por la menor potencia de n, n´ tal que este nuevo producto no sea solución de la ecuación característica homogénea asociada.

Ejemplo: Torres de Hanói

La ecuación de recurrencia asociada con el problema de las Torres de Hanói es la siguiente:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

Con las condiciones iniciales:

$$T_1 = 1$$

Se resuelve la siguiente homogénea:

$$T_n^{(h)} = 2T_{n-1}$$

La ecuación característica es: $x - 2 = 0$, entonces $x = 2$

Entonces:

$$T_n^{(h)} = A2^n$$

A continuación, se resuelve la ecuación particular: $T_n^{(p)} = B = 2B + 1$, entonces $B = -1$.

$T_n = A2^n - 1$, entonces igualando con las condiciones iniciales la solución es : $T_n = 2^n - 1$

Recurrencias No lineales

Para resolver recurrencias no lineales tenemos muchas opciones de las cuales:

- Buscar transformaciones o cambios de variables que hagan la recurrencia lineal.
- Para el caso $t(n) = a \cdot t\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, hay un teorema muy útil que es el Teorema Maestro.

La recurrencia en la computación

La conexión con el análisis de algoritmos estriba en que la forma que se ha adoptado para medir las complejidades, utiliza funciones cuyo dominio son los números naturales, o en otras palabras, sucesiones. Si el algoritmo es recurrente, es de esperarse que las complejidades, como funciones que estiman la demanda de recursos a lo largo de la ejecución, sean sucesiones que satisfacen ciertas ecuaciones de recurrencia. En un algoritmo recursivo, la función t(n) que establece su complejidad viene dada por una ecuación de recurrencia. Una ecuación de recurrencia nos permiten indicar el tiempo de ejecución para los distintos casos del algoritmo recursivo (casos base y recursivo).

Cálculo de la factorial

```
int Fact(int n){
      if(n<=0)
         return 0;
      else if(n==1)
         return 1;
      return n*Fact(n-1);
}
```

Considerando el producto como operación básica, podemos construir la ecuación recurrente para calcular la complejidad del algoritmo como sigue:

Como se ve en el código el caso base es para n<=1, para estos valores de n el número de multiplicaciones que se realiza es 0. Y en otro caso es 1 más las necesarias para calcular el factorial de n-1. Así construimos la función recurrente:

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ t(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Ahora si resolvemos la ecuación recurrente sabremos la complejidad de este algoritmo en función de n. Procedemos a resolver esta ecuación recurrente no lineal:

$$t(n) = t(n-1) - 1$$

Resolvemos la homogénea:

$$t(n) = t(n-1) \longrightarrow \quad r - 1 = 0 \longrightarrow \quad r = 1 a_n^h = c1^n \longrightarrow \quad a_n^h = c$$

Resolvamos ahora la particular:

Como la particular' coincide con la r, debemos aumentar el grado multiplicando por n

$$\longrightarrow a_n^p = n1^n \longrightarrow \quad a_n^p = n$$

Por lo que la solución de la ecuación recurrente queda como sigue:

$$t(n) = c + n$$

Ahora calculamos c utilizando el caso base, t(1) = 0

$$t(1) = c + 1 = 0 \longrightarrow \quad c = -1$$

Ya tenemos la solución: t(n) = n - 1

La ecuación que nos ha quedado es de grado 1 por lo que la complejidad es del orden exacto de n -> θ(n)

Por ejemplo para calcular el factorial de 3 necesitaremos t(3) productos lo que es igual a

$$3 - 1 = 2 \longrightarrow \quad 3 \cdot (2 \cdot (1))$$

Como vemos son 2 productos como nos ha devuelto la ecuación